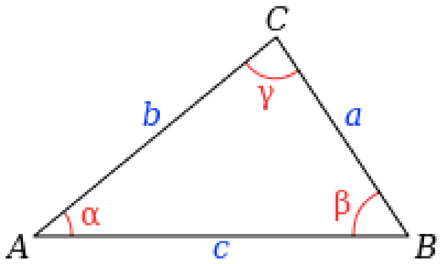
Egy háromszögtani alapfeladatról

Az alábbiakban egy síkbeli háromszögekre vonatkozó olyan feladatról lesz szó, mellyel még nemigen volt dolgunk, ebben a formában. Talán csak azért, mert még nem volt rá szükségünk.

Azzal kezdjük, hogy mostanában került látókörünkbe a *tangenstétel*. Egy korábbi írá - sunkban foglalkoztunk ezzel, melynek címe: ***Még a paralelogrammáról***. Ebben átismé - teltük a tangenstétel levezetését, melynek eredménye – az 1. ábra jelöléseivel – :



1. ábra

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}. \qquad (1)$$

A trigonometriai alapfeladat az alábbi.
Adott: ***a, b, γ*** .
Keresett: ***c, α, β***.

Az ilyen alapismeretek rendszerint megtalálhatók a matematikai kézikönyvekben, így [1] - ben is. Meglepő módon a régebbi és az újabb kiadásban nem ugyanazt találtuk: az újabb kiadásban két megoldási módot is mutatnak. Ezekről lesz most szó.

<u>1. megoldás</u>: ***tangenstétellel***

Először a háromszög szögeire vonatkozó összefüggéssel:
$\alpha+\beta+\gamma = 180° \to \alpha+\beta = 180° - \gamma \to \frac{\alpha+\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$, tehát:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}. \qquad (2)$$

Ezután (1) - et átrendezzük:

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} \;; \qquad (3)$$

most (2) és (3) - mal:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{tg}\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)\ , \qquad (4/1)$$

innen:

$$\frac{\alpha-\beta}{2}=\operatorname{arctg}\left[\frac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{tg}\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)\right]. \qquad (4)$$

Majd (2) és (4) - gyel:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=90°-\frac{\gamma}{2},$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2}=\operatorname{arctg}\left[\frac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{tg}\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)\right]\ ;$$

összeadással:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}=\alpha=90°-\frac{\gamma}{2}+\operatorname{arctg}\left[\frac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{tg}\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)\right],\ \text{ tehát:}$$

$$\underline{\alpha(a,b,\gamma)=90°-\frac{\gamma}{2}+\operatorname{arctg}\left[\frac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{tg}\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)\right];} \qquad (5)$$

ezután kivonással:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}=\beta=90°-\frac{\gamma}{2}-\operatorname{arctg}\left[\frac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{tg}\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)\right],\ \text{ tehát:}$$

$$\underline{\beta(a,b,\gamma)=90°-\frac{\gamma}{2}-\operatorname{arctg}\left[\frac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{tg}\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)\right].} \qquad (6)$$

A harmadik oldal hossza koszinusztétellel:

$$\underline{c(a,b,\gamma)=\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}\ .} \qquad (7)$$

Kicsit meglepő, hogy [1] / 1 - ben a szinusztétellel adódó

$$c(a,b,\gamma)=a\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha(a,b,\gamma)} \qquad (8)$$

képletet vették (7) helyett; ugyanis (7) a közvetlenül adott ***a, b, γ*** mennyiségekkel dolgozik, nem pedig az adatokból (5) szerint számított ***α*** - val.

Egy speciális eset: (5) és (6) - ból

$$a=b \qquad (*)$$

(egyenlő szárú háromszög) esetén

$$\underline{\alpha^*=\beta^*=90°-\frac{\gamma}{2}.} \qquad (9/1)$$

A ***c**** oldalhossz (7) és (*) - gal:

$$c^* = \sqrt{a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos\gamma} = \sqrt{2 \cdot a^2 \cdot (1 - \cos\gamma)} = \sqrt{2 \cdot a^2 \cdot 2 \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}} =$$

$$= 2 \cdot a \cdot \sin\frac{\gamma}{2}\ ,$$ tehát:

$$\underline{c^* = 2 \cdot a \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}\ , \qquad (9/2)$$

a várakozásnak megfelelően.

2. megoldás: ***koszinusztétellel***

Ekkor a ***c*** oldalt ismét (7) - tel számítjuk:

$$\underline{c(a, b, \gamma) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}}\ . \qquad (7)$$

Az ***α*** szöget megint koszinusztétellel nyerjük; az 1. ábra alapján:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \ \rightarrow\ \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\ . \qquad (10)$$

Most (10) - ből:

$$\underline{\alpha(a, b, \gamma) = \arccos\left[\frac{b^2 + c^2(a, b, \gamma) - a^2}{2 \cdot b \cdot c(a, b, \gamma)}\right]}\ . \qquad (11)$$

Végül:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \ \rightarrow$$

$$\underline{\beta(a, b, \gamma) = 180° - \alpha(a, b, \gamma) - \gamma}\ . \qquad (12)$$

A (*) specializáció (11) és (12) esetében így alakul – ***c**** már (9 / 2) szerint ismert – :

$$\cos\alpha^* = \frac{a^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{c^*}{2 \cdot a} = \sin\frac{\gamma}{2} = \cos\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) \ \rightarrow$$

$$\alpha^* = 90° - \frac{\gamma}{2}, \qquad (13/1)$$

$$\beta^* = 180° - \alpha^* - \gamma = 180° - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) - \gamma = 90° - \frac{\gamma}{2},$$ azaz:

$$\underline{\beta^* = \alpha^* = 90° - \frac{\gamma}{2}}, \qquad (13/2)$$

(9 / 1) - gyel megegyezően.

Ezzel a kitűzött feladatot – a trigonometriai alapfeladat feldolgozását – elvégeztük.

Megjegyzések:

M1. Látható, hogy megvan a hihető magyarázata annak, hogy miért nem használtuk korábban a tangenstételt: más úton is elérhetők az eredmények.

M2. A (4 / 1) képlet átírható a

$$\mathrm{tg}\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = \mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2} \qquad (14)$$

összefüggés felhasználásával az alábbi alakba:

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}. \qquad (4/2)$$

Ez megegyezik az [1] / 2 - ben találhatóval.
Nekünk a (4 / 1) képlet - alak jobban tetszik: a vele készült (5) és (6) képletek talán szimmetrikusabbak.

M3. Érdekes lehet még (10) átalakítása (7) - tel:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c} = \frac{b^2+a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma-a^2}{2\cdot b\cdot c} = \frac{b^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}{2\cdot b\cdot c} = \frac{2\cdot b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}{2\cdot b\cdot c} =$$
$$= \frac{b-a\cdot\cos\gamma}{c} = \frac{b-a\cdot\cos\gamma}{\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}},$$

tehát:

$$\cos\alpha = \frac{b-a\cdot\cos\gamma}{\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}}, \qquad (15)$$

innen:

$$\underline{\alpha(a,b,\gamma) = \arccos\left[\frac{b-a\cdot\cos\gamma}{\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}}\right].} \qquad (16)$$

A (15) képlet is közvetlenül ellenőrizhető a szemlélet alapján.
Természetesen (11) is működik, (7) - tel.

M4. Nem készítettünk szemléltető ábrát pár helyen; ott, ahol az eredmény szemlélet alapján való belátását emlegettük, a várakozásnak megfelelően.
Ezek elkészítése legyen az érdeklődő Olvasó feladata.

M5. Az [1] / 1 könyvecskében a kotangenst még ***cotg( )*** - nek írták. Úgy látszik, ez is megváltozott az idők során; pedig a ***ctg( )*** - t néha könnyű ***c* tg ( )*** - nek olvasni.

M6. Most vettük észre, hogy [2] - ben a tangenstételt *szinusz tangens tétel*nek nevezik. Ezt nem árt megjegyezni, a félreértéseket elkerülendő – ld. 2. ábra!

TRIGONOMETRIC SOLUTION

This type of solution is required when accuracy is important, as in land surveying. For both problems this type of solution is based upon the *sine tangent theorem:*

If

$$\sin\alpha/\sin\beta = m/n,$$

194 *Planimetric Problems*

then also

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\Big/\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = (m-n)/(m+n).$$

[From $\sin\alpha/\sin\beta = m/n$ it first follows that

$$(\sin\alpha - \sin\beta)/(\sin\alpha + \sin\beta) = (m-n)/(m+n).$$

If the numerator and denominator of the fraction on the left of the equation are converted into products, we obtain

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\Big/\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = (m-n)/(m+n)$$

or

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\Big/\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = (m-n)/(m+n).]$$

2. ábra – forrása: [2]

Források:

[1] / 1 – ***I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev***: Matematikai zsebkönyv
2. bővített kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963., 234. o.

[1] / 2 – ***I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev***: Matematikai zsebkönyv
6. átdolgozott kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987., 358. o.

[2] – ***Heinrich Dörrie***: 100 Great Problems of Elementary Mathematics
New York Dover Publications, Inc. 1965.
vagy:
https://archive.org/details/100GreatProblemsOfElementaryMathematicsDoverHeinrichDrrie_201808/page/n347

Összeállította: ***Galgóczi Gyula***
mérnöktanár

Sződliget, 2019. 01. 03.